

Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ



В.А. УСПЕНСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ
ПРИЛОЖЕНИЯ
МЕХАНИКИ
К МАТЕМАТИКЕ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА • 1958

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

ВЫПУСК 27

В. А. УСПЕНСКИЙ

**НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
МЕХАНИКИ К МАТЕМАТИКЕ**

6967
7909

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1958

АННОТАЦИЯ

Настоящая лекция рассчитана на учащихся средних школ (7—10 классы). В ней рассмотрены простые решения различных математических задач (иногда довольно сложных) при помощи использования некоторых положений механики.

Успенский Владимир Андреевич

Некоторые приложения механики к математике

Редактор *Ланко А. Ф.*

Техн. редактор *Крючкова В. Н.*

Корректор *Плетнева Л. С.*

Сдано в набор 25 IV 1958 г. Подписано к печати 30 VII 1958 г. Бумага 84×108 мм.
Физ. печ. л. 1,5. Условн. печ. л. 2,46. Уч.-изд. л. 2,45. Тираж 35 000 экз. Т-07191
Цена книги 75 коп. Заказ № 1881.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Московского городского Совнархоза.
Москва, Ж-51, Валовая, 28.

Отпечатано с готового набора в типографии и дательства
МГУ. Москва, Моховая 9 заказ 989

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
§ 1. Задача о касательной к окружности	5
§ 2. Задача о касательной к эллипсу	7
§ 3. Задачи о касательных к параболе и гиперболе	12
§ 4. Принцип минимума потенциальной энергии	17
§ 5. Материальные точки и центр тяжести	21
§ 6. Центр тяжести системы двух материальных точек	25
§ 7. Теоремы о пересечении прямых	26
§ 8. Центр тяжести стержня с многими грузами	29
§ 9. Одна задача из теории чисел (формулировка)	32
§ 10. Одна задача из теории чисел (решение)	35
§ 11. Невозможность вечного двигателя	40
Заключение	42

ПРЕДИСЛОВИЕ

Применения математики в физике (в частности, в механике) общеизвестны: достаточно раскрыть школьный учебник. Вышние разделы механики требуют сложного и тонкого математического аппарата.

Существуют, однако, математические задачи, при решении которых с успехом могут быть использованы понятия и законы физики; см., например, главы IV и VI книги Л. А. Люстерника «Кратчайшие линии», изданной в качестве 19-го выпуска настоящей серии. Ряд подобного рода задач, решаемых методами механики (а именно с привлечением законов равновесия), был приведен автором в его лекции «Решение математических задач методами механики», читанной для школьников 7—8 классов в Московском государственном университете 19 февраля 1956 г.; эта лекция, с незначительными добавлениями, и составляет содержание данной брошюры.

Автор глубоко благодарен Исааку Моисеевичу Ягдому, обстоятельные замечания которого способствовали уменьшению числа недостатков этой книжки.

§ 1. ЗАДАЧА О КАСАТЕЛЬНОЙ К ОКРУЖНОСТИ

Как известно, *касательной* к окружности называется прямая, имеющая с этой окружностью ровно одну общую точку (называемую *точкой касания*). В учебниках геометрии доказывается, что касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному из центра окружности в точку касания. Приведем доказательство этой теоремы, опирающееся на соображения механики.

С этой целью проведем мысленно следующий эксперимент. Представим себе, что грузик, прикрепленный к концу M нити, висит на этой нити; другой конец нити закреплен в точке O . Из повседневного опыта читатель, конечно, знает, что при этом

(А) *Грузик находится в самом нижнем из возможных положений, которые он может занимать, будучи связан нитью.*

Этот факт, имеющий решающее значение для наших рассуждений, сам по себе совершенно очевиден; полезно, однако, заметить, что он представляет собой частное проявление некоей общей закономерности (формулируемой в так называемом «принципе минимума потенциальной энергии»), с которой нам придется встретиться в более сложной обстановке в § 4. Точнее, при помощи упомянутого «принципа минимума потенциальной энергии» утверждение (А) выводится из следующего очевидного утверждения (Е):

(Е) *Существует только одно положение равновесия грузика, т. е. положение грузика в покое полностью определяется положением точки O и длиной нити.*

Из единственности положения равновесия (утверждение Е) вытекает, далее, что

(С) *Грузик находится на вертикальной прямой, прозенной из точки подвеса.*

В самом деле, если бы грузик не находился на этой вертикальной прямой, то, поворачивая вокруг нее нить вместе с

грузиком, мы получили бы новое положение равновесия (рис. 1). В этом рассуждении мы опираемся, таким образом, еще на один известный из опыта факт:

(S) Если тело или систему тел, находящихся в равновесии, повернуть вокруг вертикальной прямой, то новое положение будет также положением равновесия.

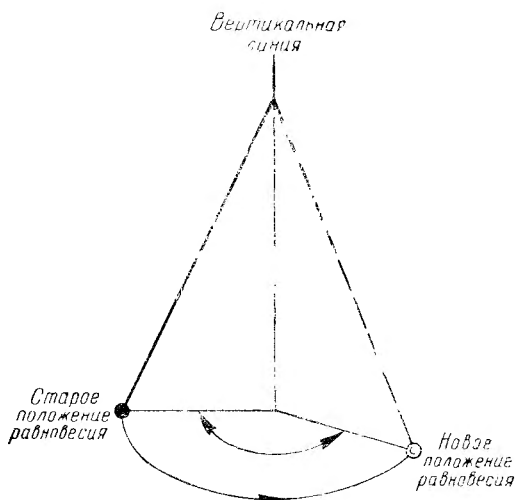


Рис. 1.

Из утверждений (A) и (C) вытекает, что

(B) Расстояние от грузика до точки подвеса O равно длине нити MO (это означает, что нить натянута).

(Заметим вскользь, что утверждения (B) и (C), конечно, не менее очевидны, чем те, из которых мы их вывели.)

Перейдем теперь к доказательству нашей теоремы. Пусть (рис. 2) дана окружность с центром в точке O и прямая p , касающаяся этой окружности в точке P . Надо доказать, что $OP \perp p$. Перерисуем наш чертеж на вертикальной стене, причем так, чтобы прямая p была горизонтальна и окружность была расположена над прямой p . (Если поставить эту книжку вертикально на ее нижний срез, то рис. 3 будет отвечать указанным только что требованиям.) Заметим, что точка P будет при этом самой нижней точкой окружности. Возьмем теперь нить, длина которой равна радиусу окружности, и закрепим один ее конец в центре окружности O . К другому концу,

который обозначим буквой M , прикрепим грузик и подвесим его на нити. Покажем, что конец M попадет в точку P . Действительно, во-первых, в силу (В), конец M может находиться лишь на окружности; во-вторых, в силу (А), этот конец находится в самой нижней точке этой окружности, т. е. в P . Таким образом, нить пойдет по радиусу OP . Стало быть, в силу (С), этот радиус перпендикулярен прямой p , что и требовалось доказать.

Разобранный только что пример, конечно, не очень интересен, ибо он посвящен доказательству хорошо известной и довольно простой теоремы. Однако в дальнейшем этот же метод

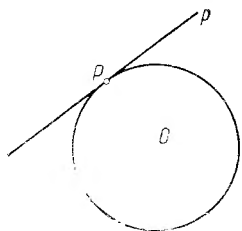


Рис. 2.

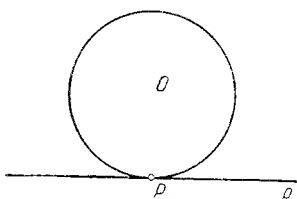


Рис. 3.

будет применен к доказательству новых теорем. При этом нам пригодятся навыки, приобретенные в этом параграфе при «механическом» доказательстве теоремы о касательной к окружности. Прежде всего мы займемся в следующем параграфе естественным обобщением этой теоремы, а именно теоремой о касательной к эллипсу.

§ 2. ЗАДАЧА О КАСАТЕЛЬНОЙ К ЭЛЛИПСУ

Окружность определяется как геометрическое место точек A , расстояние AO от которых до заданной точки O равно заданному числу l . Обобщением этого определения является определение эллипса. *Эллипсом* (рис. 4) называется геометрическое место точек A , сумма расстояний $AO_1 + AO_2$ от которых до двух заданных точек O_1 и O_2 равна заданному числу l . Точки O_1 и O_2 называются *фокусами* эллипса, а l — *длиной большей оси* эллипса. Отрезки AO_1 и AO_2 , соединяющие какую-либо точку A на эллипсе с фокусами, называются *фокальными радиусами*, проведенными в точку A . Окружность есть частный случай эллипса, когда точки O_1 и O_2 совпадают.

Фокальные радиусы в этом случае тоже совпадают и равны радиусу окружности.

Каждый может нарисовать эллипс, если возьмет нить, закрепит оба ее конца в каких-нибудь точках O_1 и O_2 , выбранных на листе бумаги с тем расчетом, чтобы расстояние O_1O_2 было меньше длины нити, и затем проведет линию, натягивая нить острием карандаша (рис. 5). О свойствах эллипса см. в кинге А. И. Маркушевича «Замечательные кривые», составляющей 4-й выпуск настоящей серии.

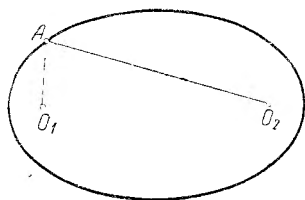


Рис. 4.

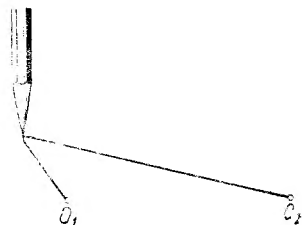


Рис. 5.

Как и в случае окружности, прямая называется *касательной* к эллипсу, если она имеет с ним ровно одну общую точку (рис. 6).

Имеет место следующая теорема о касательной к эллипсу: *Касательная к эллипсу образует равные углы с фокальными радиусами, проведенными в точку касания* (на рис. 6 такими равными углами являются углы KPO_1 и LPO_2).

Частным случаем этой теоремы является теорема о касательной к окружности. Действительно, в случае окружности оба фокальных радиуса совпадают, поэтому теорема о касательной к эллипсу формулируется для случая окружности так: касательная образует равные смежные углы с радиусом, проведенным в точку касания; а это и означает перпендикулярность радиуса и касательной.

Мы дадим сейчас доказательство теоремы о касательной к эллипсу, аналогичное тому, какое мы дали для теоремы о касательной к окружности. Рекомендуем читателю, прежде чем читать дальше, попытаться самому придумать такое «механическое» доказательство.

Как и в предыдущем параграфе, мы предположим доказательству некий механический эксперимент. Фиксируем в вертикальной плоскости на равной высоте две точки $\bar{O}_1$ и $\bar{O}_2$. Возьмем далее нить, длина которой превосходит расстояние $\bar{O}_1\bar{O}_2$, и при-

крепим концы этой нити к точкам $\bar{O}_1$ и $\bar{O}_2$. На нить наденем грузик таким образом, чтобы он мог свободно скользить вдоль нити (например, проденем нить в ушко гири, как это показано на рис. 7). Если мы теперь предоставим грузику свободно висеть на нити, то он не падет в конце концов в некоторую точку $\bar{M}$, где и будет находиться в состоянии покоя. Очевидно, что имеют место следующие два факта:

($\bar{C}_1$) Плоскость $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{M}$ вертикальна (т. е. проходит через вертикальную прямую).

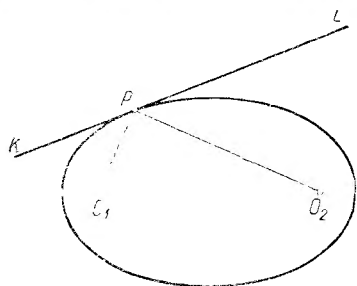


Рис. 6.

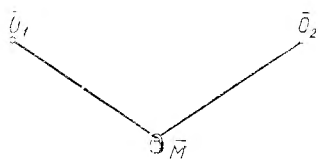


Рис. 7.

($\bar{C}_2$) Углы, образованные отрезками $\bar{M}\bar{O}_1$ и $\bar{M}\bar{O}_2$ с горизонтальной прямой, проведенной через точку $\bar{M}$ в плоскости $\bar{M}\bar{O}_1\bar{O}_2$, равны.

Заметим, что утверждения ($\bar{C}_1$) и ($\bar{C}_2$) можно вывести из утверждения о единственности положения равновесия грузика. С этой целью проведем вертикальную прямую через середину отрезка $\bar{O}_1\bar{O}_2$ и повернем нашу нить вместе с грузиком вокруг этой прямой на 180° . Концы нити $\bar{O}_1$ попадет теперь в точку $\bar{O}_2$, а конец $\bar{O}_2$ — в точку $\bar{O}_1$. Согласно утверждению (S) из предыдущего параграфа, мы получим состояние равновесия, поэтому, в силу предположенной единственности этого состояния, нить (а вместе с ней и треугольник $\bar{M}\bar{O}_1\bar{O}_2$) совместится со своим прежним положением. Раз треугольник при повороте на 180° совмещается сам с собой, значит, ось вращения лежит в плоскости треугольника. Значит, плоскость $\bar{M}\bar{O}_1\bar{O}_2$ проходит через вертикальную ось, т. е. она вертикальна. Далее, при произведенном повороте горизонтальная прямая, проведенная через $\bar{M}$ в плоскости $\bar{M}\bar{O}_1\bar{O}_2$, совместится сама с собой, а угол, образованный ею с отрезком $\bar{M}\bar{O}_1$, совместится с углом, образованным ею же с отрезком $\bar{M}\bar{O}_2$. Значит, эти углы равны.

Избавимся теперь от предположения, что точки подвеса находятся на одинаковой высоте. Пусть O_1 и O_2 — произвольные точки. Перенесем к ним на нити свободно скользящий вдоль

нее грузик (рис. 8). Пусть в покое грузик находится в точке M . Заметим, что если грузик находится в M и если мы закрепим нить в любой ее точке, то положение груза не изменится. (Действительно, если скажем, мы закрепим нить в точке O_2 , см. рис. 8, то натяжение участка нити $\bar{O}_2O_1$ заменится реакцией опоры в точке O_2 .) Это обстоятельство позволяет распространить на общий случай выводы, сделанные нами при рассмотрении равновесных точек подвеса. В самом деле, достаточно закрепить нить в точке O_1 , находящейся на той же высоте, что и O_1 (рис. 8¹); положение равновесия при этом не изменится. Положив $\bar{O}_1 = O_1$, мы приходим к разобранному ранее случаю равновесных точек подвеса $\bar{O}_1$ и $\bar{O}_2$. Поэтому

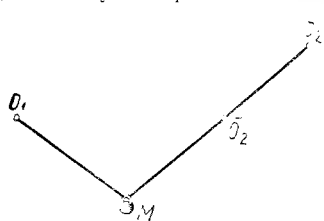


Рис. 8.

из (C_1) и (C_2) немедленно вытекают утверждения (C_1) (очевидно само по себе) и (C_2) :

(C_2) *Нити от O_1 до M вертикальны.*

(C_3) *Углы, образованные отрезками MO_1 и MO_2 с горизонтальной прямой, проведенной через точку M в плоскости MO_1O_2 , равны.*

Очевидным образом справедливы, наоборот, еще следующие два утверждения:

(А) *В положении равновесия грузик занимает единственное из всех положений, которые он может занимать, будучи связан нитью нити помощи упомянувшегося уже в § 1 принципа минимума потенциальной энергии это утверждение выводится из единственности положения равновесия.*

(В) *В положении равновесия нить натянута* (это значит, что отрезки нити MO_1 и MO_2 прямые) и, следовательно, сумма расстояний от точки M до O_1 и O_2 равна длине нити.

Вернемся к доказательству наших теорем о фокальных дугах. Пусть даны эллипс с фокусами O_1 и O_2 (см. рис. 9) и дуга большого эллипса KL и прямая KL , касающаяся эллипса в точке P . Требуется доказать, что $\angle O_1PK = \angle O_2PL$. Для доказательства повернем чертёж так, чтобы ось O_1O_2 была горизонтальной.

Для точки O_2 видно, что O_1O_2 — луч O_2K , т. е. O_1 — из всех O_2 —

ной, прямая KL горизонтальной, а эллипс был расположен над прямой KL (тогда P будет самой нижней точкой эллипса). Возьмем нить данным L , наденем на нее грузик, закрепим концы нити в точках O_1 и O_2 , после чего отпустим грузик. Он займет некоторое положение M . В силу (С₁) точка M будет лежать в плоскости чертежа. В силу (В) она будет лежать на эллипсе. В силу (А) она совпадет с P . Таким образом, нить пойдет по отрезкам PO_1 и PO_2 . В силу (С₂) углы, образованные этими отрезками с прямой KL , будут равны.

Другое доказательство этой теоремы, также использующее соображения механики, читатель найдет в § 11 книги Л. А. Спостерника «Кратчайшие линии».

Свойство касательной к эллипсу образовывать равные углы с фокальными радиусами дает возможность построить циркулем и линейкой касательную к эллипсу (конечно, заданы его фокусы) в данной точке. Для этого достаточно провести прямые через точку касания P и фокусы O_1 и O_2 (см. рис. 9) и найти биссектрису угла SPO_2 (или угла TPO_1). Эта биссектриса и будет касательной.

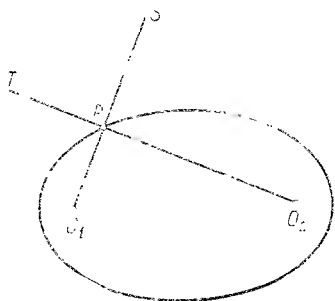


Рис. 9.

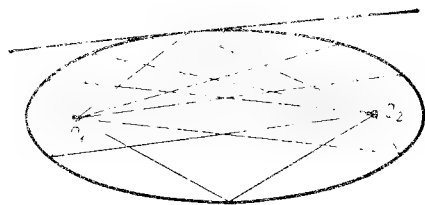


Рис. 10.

Теорема о касательной к эллипсу имеет, впрочем, еще одно интересное применение. Если считать, что эллипс — зеркало, т. е. ч. л. п. с. а. распространяющиеся в плоскости, отражаются от эллипса, то лучи, исходящие от точечного источника света, помещенного в одном из фокусов, соберутся в другом фокусе (рис. 10).

Известно, что угол, образованный с эллипсом и идущим из фокуса лучом света равен по величине углу, образованному с эллипсом отраженным лучом. Мы же образовали прямой и обратный

(в данном случае лучом света и эллисом, измеряется углом между этой прямой и касательной к кривой, проведенной в вершине угла. Поскольку падающий луч идет по фокальному радиусу, то, в силу доказанной теоремы, отраженный луч пойдет по другому фокальному радиусу.

§ 3. ЗАДАЧИ О КАСАТЕЛЬНЫХ К ПАРАБОЛЕ И ГИПЕРБОЛЕ

Параболой (рис. 11) называется геометрическое место точек P , равноудаленных от некоторой точки F (называемой *фокусом* параболы) и некоторой прямой d , называемой *директрисой*

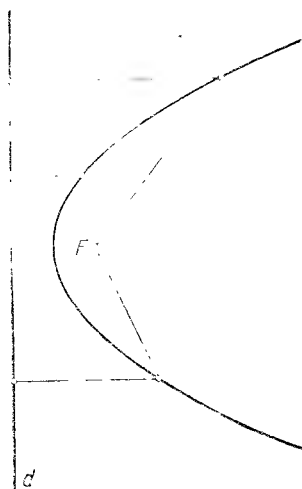


Рис. 11.

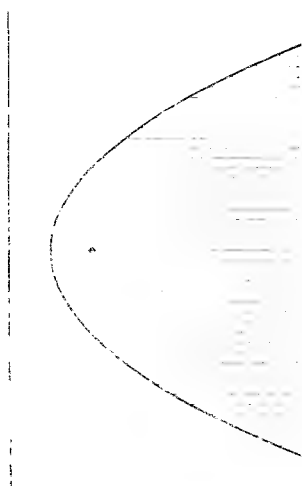


Рис. 12.

параболы. (Подробнее о параболе см. уже упоминавшуюся книгу А. Н. Маркушевича.) Парабола делит плоскость на две части: в одной из них находится директриса, в другой (зазатрихованной на рис. 12, — фокус. Прямая, пересекающая параболу ровно одну общую точку и целиком расположенная в одной из частей, на которые параболой разделяется плоскость, называется *касательной* к параболе. На рис. 13 прямая p касательна, а прямая q не является касательной, хотя и имеет с параболой лишь одну общую точку.

Справедлива следующая теорема о касательной к параболе: Если из произвольной точки P параболы (рис. 14) провести отрезок PF , соединяющий P с фокусом, и

отрезок PD , перпендикулярный к директрисе, то углы, образованные этими отрезками с касательной p в точке P , равны (так, на рис. 14 $\angle DPK = \angle KPF$).

Эту теорему можно доказать, опираясь на «механические соображения», аналогично теоремам из двух предыдущих параграфов. Дадим набросок такого доказательства.

Проведем на произвольном расстоянии L от прямой d пря-

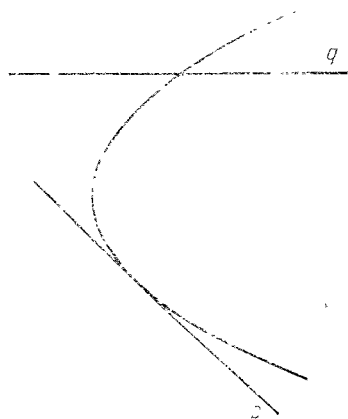


Рис. 13.

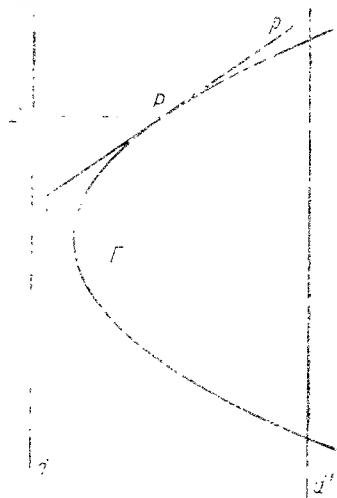


Рис. 14.

мую d' d , однако так, чтобы точка P лежала между d' и d . Повернем чертеж так, чтобы он лежал в вертикальной плоскости, касательная p была горизонтальной и параболы была расположена над p . Будем мыслить себе прямую d в виде тонкого стержня, по которому скользит кольцо (рис. 15). К кольцу прикрепим нить L , другой конец нити закрепим в точке G . На эту нить наденем грузик, который сможет скользить вдоль нее. Пусть положение равновесия грузика есть M , а положение кольца в это время есть D' . Нить будет натянута, поэтому стрелки MG и MD' будут прямо пропорциональны. Заметим прежде всего, что

$$MD' \perp d'. \quad (1)$$

(Если бы это было не так, то, как видно из рис. 16, составляющая T , силы T натяжения нити вдоль стержня d' была бы отлична от нуля и заставила бы кольцо

сдвинутым.) Далее, повторю рассуждения предыдущего параграфа, устанавливаем, во-первых, что эти образования

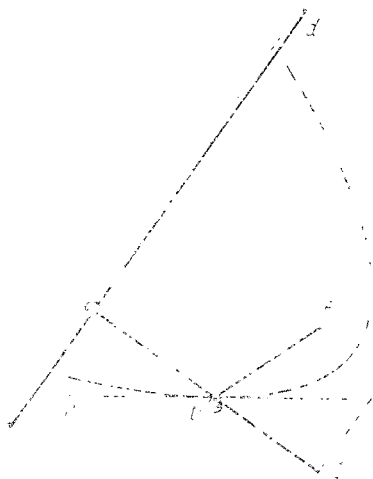


Рис. 15.

отрезками MD' и MF с прямой l , равны и, во-вторых, что

$$MD' - MF = l. \quad (2)$$

Проведем $MD \perp d$. Так как расстояние между d и d' равно l , то из (1) и (2) следует, что

$$MD = MF. \quad (3)$$

А это означает, что M лежит на параболы, причем поскольку M занимает самое нижнее из возможных положений, а P есть самая нижняя точка параболы, то M совместится с P .

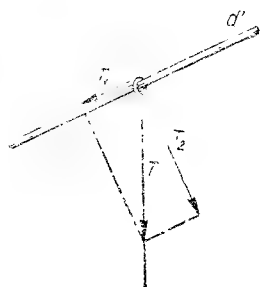


Рис. 16.

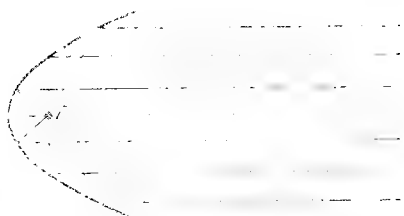


Рис. 17.

Следовательно, в конечном счете углы, составленные отрезками PF и PD с прямой l , равны.

фокальными радиусами, проведенными в точку касания (так, на рис. 19 $\angle F_1PL = \angle LPF_2$).

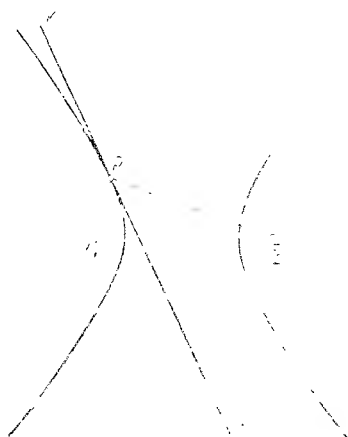


Рис. 19.

Мы не будем проводить доказательства этой теоремы (предоставим его читателю); приведем лишь доказательство в его основе механическое построение.

По определению гиперболы, разности между фокальными радиусами постоянна; обозначим эту разность через a . Пусть точка касания P лежит на правой ветви (рис. 20). Проведем из левого фокуса F_1 окружность с тем большим радиусом r , что, во внешнем, $r > a$ и, во внутреннем, точка P лежит внутри этой окружности. Будем мыслить себе окружность в виде прозрачного колпача, по которому скользит другое, маленькое колесо.

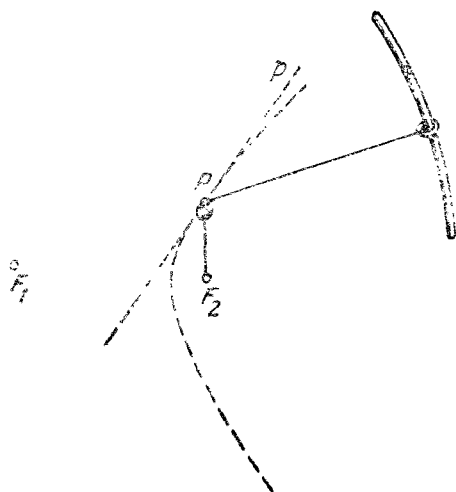


Рис. 20.

Обозначим длину $r - a$ и проведем ее сквозь грузик,

другой скользять вдоль нее. Прикрепим один конец нити к маленькому кольцу, а другой закрепим в правом фокусе F_2 . Если теперь повернуть чертеж так, чтобы прямая p (касательная) была горизонтальна, а соответствующая ветвь гиперболы лежала над прямой p , то надетый на нить грузик в положении покоя будет находиться в точке P . Это обстоятельство и позволяет доказать теорему при помощи уже применявшихся нами рассуждений. Заметим, что если точка касания лежит на левой ветви, то можно повторить построение, описывая окружность из левого фокуса. Можно, однако, и в этом случае воспользоваться окружностью с центром в левом фокусе, только тогда надо брать длины r и r_1 .

Как и предыдущие теоремы о касательных, теорема касательной к гиперболе дает способ ее построения.

§ 4. ПРИНЦИП МИНИМУМА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Грузик, движущийся по гладкой поверхности, способен при падении совершить работу, т. е. обладает потенциальной энергией. Как известно из школьного курса физики, потенциальная энергия грузика весит q , поднятого на высоту h , измеряется и называется $q h$. Мы видим, что потенциальная энергия тем больше, чем выше находится грузик. Устроившись грузик может совершить работу по сравнению с тем, что он обладает потенциальной энергией, стремясь уменьшиться. Если грузик прикреплен к нити, а нить закреплена в некоторой точке, то потенциальная энергия будет минимальна. Поэтому сформулируем теорему о касательных, равносильную утверждению (А), следующее: во всяком положении грузика наименьшее из возможных положений, равносильное утверждению (А), существует.

(У) Если в некотором положении грузика его потенциальная энергия достигла наименьшего значения,

то в этом положении утверждение (У) (а следовательно и (А)) является истинным, а утверждение (В) — ложным, а следовательно утверждение (В) — истинным.

(Ф) Если в некотором положении грузика его потенциальная энергия достигла наименьшего значения, то это положение является положением равновесия.

Чтобы вывести отсюда (У), достаточно сказать, что если бы в некотором положении равновесия потенциальная энергия не достигла наименьшего значения, то существовало бы, в силу (В),

еще другое положение равновесия, соответствующее наименьшему значению потенциальной энергии; но это противоречит утверждению (П).

Утверждение (D') является частным случаем общего принципа механики, известного принципом минимума потенциальной энергии, или принципом Дирихле (обоснование этого принципа см., например, в § 13 упомянувшейся уже книги Л. А. Косгерника). Принцип Дирихле гласит:

То положение системы, в котором потенциальная энергия достигает наименьшего значения, является устойчивым равновесием.

Если положение равновесия единственно, то принцип Дирихле допускает важное следствие:

В устойчивом равновесии потенциальная энергия системы достигает наименьшего значения.

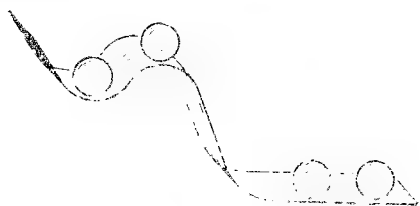


Рис. 21.

Выход этого следствия аналогичен выводу утверждения (П).

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие случаи, когда положение равновесия единственно (возможны и другие случаи; так, на рис. 21 показаны четыре положения равновесия шара).

Конечно, для решения задач о касательных нет надобности прибегать к принципу минимума потенциальной энергии; то, что грузик занимает самое нижнее из возможных положений, само по себе является очевидным. Однако в других случаях, когда имеем дело не с одним, а с несколькими грузиками, связанными между собой, было бы неверно утверждать, что в положении равновесия каждый из них занимает самое нижнее из возможных положений; здесь придется находить положения всех грузиков, а для этого часто бывает удобным использовать понятие потенциальной энергии.

Приведем пример.

В замечательной книге польского математика Г. Иггертауза «Математический каталогон» (Гостехиздат, М.—Л., 1949) есть такая задача (тема 39):

Для трех деревьев нужно построить общую школу. В первой деревне живут 50, во второй 70, а в третьей 90 детей. Где нужно выбрать место для школы, чтобы сумма времени, которое придется тратить всем детям нахождение в школу, была минимальной?

Для решения этой задачи достаточно положить на стол план местности (рис. 22), затем пробуровать в столе отверстия в местах расположения деревьев, пропустить через эти отверстия три веревочки, верхние концы их связать в один узел, а к нижним подвесить грузики соответственно в 50, 70 и 90 единиц (например, 500, 700 и 900 граммов). Школа должна быть построена там, где окажется узел. (Почему?)»

Чтобы ответить на вопрос «почему?», поставленный в задаче, подсчитаем потенциальную энергию системы, состоящей в данном случае из трех грузиков. Если веса грузиков равны q_1 , q_2 и q_3 и если первый грузик находится на высоте h_1 , второй — на высоте h_2 и третий — на высоте h_3 , то потенциальная энергия равна сумме потенциальных энергий отдельных грузиков¹⁾:

$$E = q_1 h_1 + q_2 h_2 + q_3 h_3. \quad (1)$$

Пусть теперь r_1 , r_2 , r_3 — расстояния от узла до первой, второй и третьей деревень соответственно; l_1 , l_2 , l_3 — длины первой, второй и третьей нитей и h — высота поверхности стола. Очевидно, в какой бы точке ни оказался узел и на каких бы высотах h_1 , h_2 , h_3 ни находились при этом грузики, выполняются соотношения

$$r_1 + (h - h_1) = l_1, \quad r_2 + (h - h_2) = l_2, \quad r_3 + (h - h_3) = l_3$$

или

$$h_1 = r_1 + h - l_1, \quad h_2 = r_2 + h - l_2, \quad h_3 = r_3 + h - l_3.$$

Тогда равенство (1) можно переписать так:

$$E = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 + C,$$

где

$$C = (q_1 + q_2 + q_3)h - q_1 l_1 - q_2 l_2 - q_3 l_3$$

есть величина постоянная, не зависящая от положения грузиков.

¹⁾ Если внимательно, потенциальная энергия измеряется той работой, которая может быть произведена. Если мы обрежем нить, то каждый грузик при падении произведет работу, равную его потенциальной энергии, а сумма этих работ — работу, сделанную суммой этих отдельных работ.



FIG. 2.

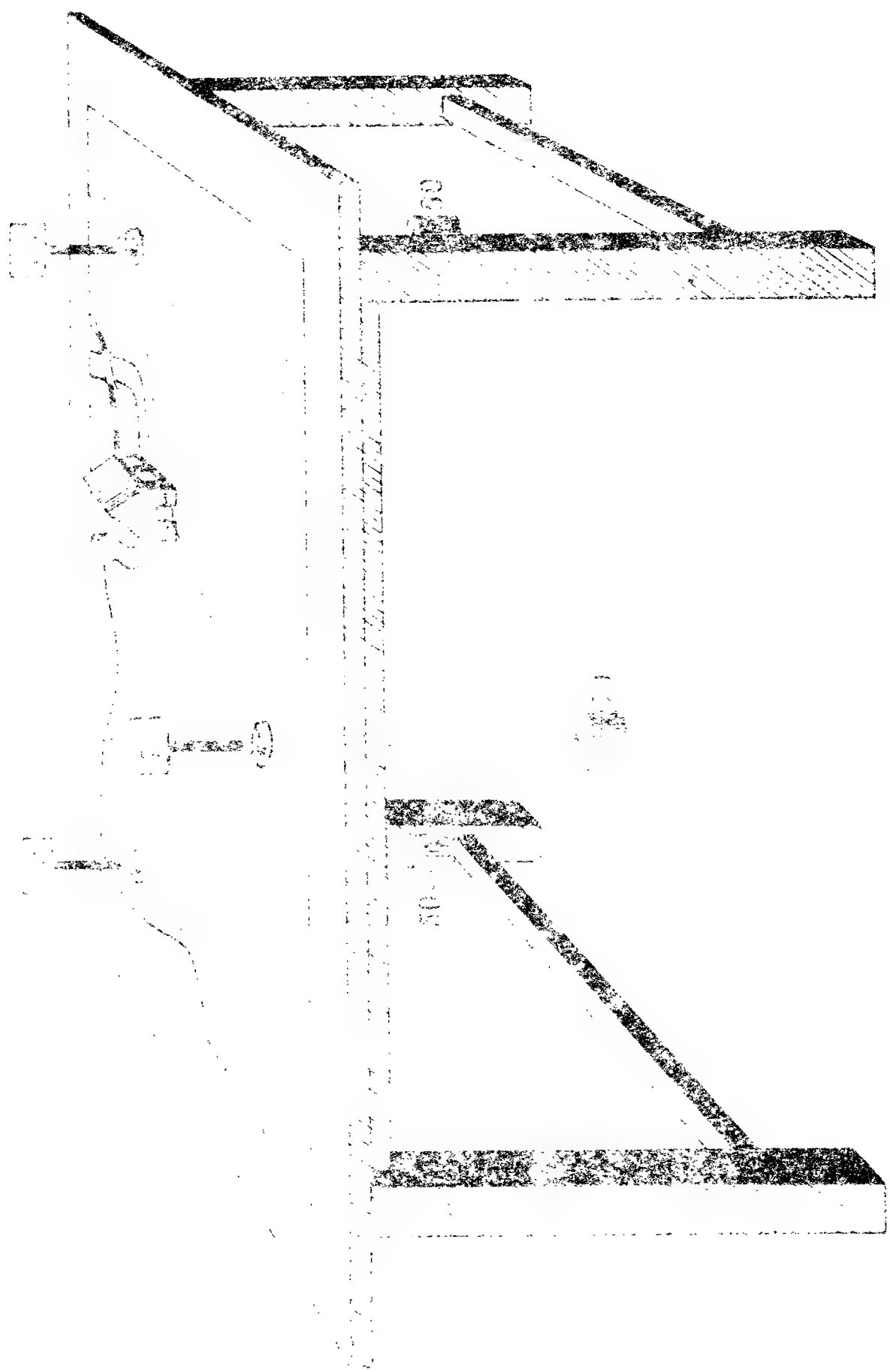


FIG. 2.

В силу принципа минимума потенциальной энергии, если E принимает наименьшее значение, то система находится в равновесии. Отсюда — в предположении единственности положения равновесия — следует, что в положении равновесия величина E минимальна. Но если величина E минимальна, то и величина

$$T = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 = E - C$$

тоже минимальна. Но T как раз и есть сумма времени, которое тратит деги, чтобы дойти из своих деревень в ту школу, где находится узел. Так что при положении узла, соответствующего равновесию системы, эта сумма времени действительно достигнет своего наименьшего значения.

§ 5. МАТЕРИАЛЬНЫЕ ТОЧКИ И ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

До сих пор мы ничего не говорили о размерах тех грузиков, которые потешивались на нитях. Из проводившихся рассуждений видно, что с одной стороны, мы предпочли бы грузики очень маленькими по размеру (столь маленькими, что о положении каждого из них можно было говорить как о точке), с другой стороны мы наделили их определенными весами и стало быть, массами.

Подобные рассуждения приводят нас к одному из основных понятий механики — понятию материальной точки¹⁾. Под материальной точкой в механике понимают тело столь малое, что его размеры можно пренебречь. Материальную точку можно представить себе как геометрическую точку, которой приписан определенное число (масса). Заметим, что поскольку материальная точка имеет определенную массу, то она имеет и определенный вес.

Если имеется какая-либо система материальных точек, то на каждую из точек действует сила тяжести, пропорциональная массе точки. Равнодействующая всех этих параллельных сил приложена в особой точке, называемой центром тяжести данной системы материальных точек. Положение центра тяжести зависит от положения точек системы и от их масс.

В механике всякое тело рассматривается как состоящее из весьма большого числа материальных точек. Эти материальные точки имеют, вообще говоря, разную массу, так что рас-

¹⁾ К сожалению, это важнейшее понятие не включено в тепе- ршний учебник физики для средней школы (А. В. Перышкин, В. В. Крауклис. Курс физики, часть первая. Механика. Учительская М., 1957).

пределение массы в ударе для неравномерной стили части тела имеют большую, другую — меньшую массу. Мы также будем допускать, что от всякого тела могут вообще не иметь никакой массы и являться тем самым невесомыми¹⁾. Центр тяжести системы материальных точек, образующих тело и называемый, по определению, центром тяжести самого тела. Если масса тела сосредоточена в конечном числе отдельных

сво точек (в таком случае нам встретятся в дальнейшем — например, невесомый стержень с висящими на нем точечными грузами), то центр тяжести такого тела совпадает, очевидно, с центром тяжести системы этих отдельных точек.

Многие свойства тела зависят исключительно от положения его центра тяжести. Как известно из школьного курса физики, равновесие тела зависит от взаимного расположения его центра тяжести и положения точек, в которых оно закреплено. Именно, пункт место следующие утверждения:

Утверждение I. Если тело, закрепленное в одной точке, находится в покое, то его центр тяжести находится на одной вертикали (рис. 23).

Утверждение II. Если тело, лежащее на одной опоре или на двух опорах, находится в покое, то вертикаль, опущенная из центра тяжести, пересекает эту опору или эти опоры (рис. 24).

Из этих утверждений (которые можно пользоваться для экспериментального нахождения центра тяжести) вытекает, в частности, следующее обстоятельство: если из тела сделать замену какого-либо тела другим, изменив ту же форму и тот же центр тяжести, то положение равновесия не изменится. Однако в целом ряде случаев необходимо учитывать, кроме положения

¹⁾ Более точно, под невесомым телом или телом с нулевой массой мы понимаем тело с массой столь малой, что ею можно пренебречь. Чистота зависит параллелизм между понятием материальной точки и понятием материального тела. Пренебрежение массой тела играет в механике не менее важную роль, чем пренебрежение размером. Так, во всех следующих рассуждениях мы пренебрегаем массами (но не размерами) точек.

центра тяжести, масс и общую массу тела (т. е. суммарную массу всех материальных точек). В примере, рассмотренном выше, тело, а именно фигура с обозначенными точками, представляющим ту же фигуру, которую рассматривает центр тяжести, не является частью, то есть частью *того же* тела может быть только так как положение центра тяжести всего тела может измениться за счет изменения массы его части. Разные положения центра тяжести и суммарной массы являются уже до некоторой степени новыми задачами, во всяком случае при рассмотрении тех задач, которые нам интересны в дальнейшем. Известно, что поэтому ввести следующее определение эквивалентности двух систем материальных точек.

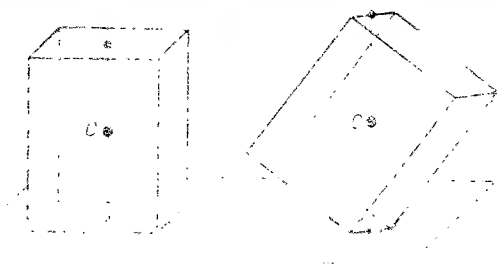


Рис. 24.

Две системы материальных точек эквивалентны, если их суммарные, центральные моменты системы точек относительно любой системы α , эквивалентны, т. е. сумма масс всех точек одной системы равно сумме масс всех точек другой системы.

Вряд ли можно считать эквивалентность двух систем точек, если тем, что при замене частей некоторой системы некоторыми частями этой системы, мы получим систему, эквивалентную первоначальной. При этом этому утверждению более подробную формулировку.

Пусть дана система σ материальных точек $M_1, \dots, M_n$ с массами $m_1, \dots, m_n$ и система α материальных точек $M'_1, \dots, M'_k$ с массами $m'_1, \dots, m'_k$. Обозначим σ и α системы σ и α общую систему β , которую заданы следующим образом:

1° Включим в β всякую материальную точку системы σ , не совпадающую по положению ни с одной из точек системы α .

2° Включим в α всякую материальную точку системы α , не совпадающую по положению ни с одной из точек системы γ .

3° Если некоторая материальная точка $\bar{M}_j$ системы α совпадает по положению с некоторой материальной точкой $\underline{M}_j$ системы α , то включим в α новую материальную точку, положение которой совпадает с положением материальных точек $\bar{M}_j$ и $\underline{M}_j$, а масса которой равна сумме $\bar{m}_j + m_j$ масс указанных материальных точек. Справедливо следующее:

Утверждение III. Если система α есть результат объединения систем α и α , а система β есть результат объединения систем β и β , и если системы α и β эквивалентны и системы α и β эквивалентны, то системы α и β также эквивалентны.

Докажем истинность утверждения III. То, что системы α и β совпадают, очевидно. Покажем, что совпадают и центры тяжести этих систем. Равнодействующую сил тяжести, действующих на материальные точки системы α можно найти следующим образом: сначала найти равнодействующую $\bar{P}$ сил тяжести, действующих на α , затем найти равнодействующую $\underline{P}$ сил тяжести, действующих на α , и, наконец, найти равнодействующую $\bar{P}$ этих равнодействующих. Только так же равнодействующую $\underline{Q}$ сил тяжести, действующих на систему β , можно найти как равнодействующую двух сил $\underline{Q}$ и $\underline{Q}$, где $\underline{Q}$ — равнодействующая сил, действующих на β , и $\underline{Q}$ — равнодействующая сил, действующих на β . В силу эквивалентности α и β силы $\bar{P}$ и $\underline{Q}$ совпадают. Только так же совпадают силы $\underline{P}$ и $\underline{Q}$, а потому совпадают и равнодействующие этих сил — силы $\bar{P}$ и $\underline{Q}$. В частности, совпадают и точки их приложения, т. е. центры тяжести систем α и β .

Заметим, что для всякой системы материальных точек можно построить эквивалентную ей систему, состоящую всего из одной материальной точки. Для этого достаточно рассмотреть материальную точку, находящуюся в центре тяжести первоначальной системы и имеющую массу, равную суммарной массе системы. Эта материальная точка и образует систему, эквивалентную первоначальной. Материальную точку, расположенную в центре тяжести какой-либо системы и имеющую массу, равную суммарной массе системы, будем называть *материальным центром* данной системы. Эквивалентные системы можно определить как такие системы, материальные центры которых совпадают.

§ 6. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СИСТЕМЫ ДВУХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

Пусть на невесомом стержне укреплены два груза P и Q , находящиеся на расстоянии d друг от друга (рис. 25). Требуется найти центр тяжести стержня с этими грузами. Из утверждения I из предыдущего параграфа, наш вопрос равносильен вопросу о том, в какой точке O надо подпереть стержень, чтобы он находился в равновесии. Обозначим расстояния некоторой точки O от грузов P и Q через u и v . Равновесие наступит тогда и только тогда, когда произведение силы P на плечо u равно произведению силы Q на плечо v , т. е.



Рис. 25.

$$Pu = Qv. \quad (1)$$

Сравнивая равенство (1) с равенством

$$u + v = d, \quad (2)$$

получаем

$$u = \frac{Q}{P+Q} d, \quad v = \frac{P}{P+Q} d.$$

Заметим, что $\frac{u}{v} = \frac{Q}{P}$, так что расстояния от центра тяжести до грузов обратно пропорциональны самим грузам.

В частности, если оба груза равны по весу, то центр тяжести находится посередине между грузами (что очевидно и непосредственно); обратно, если известно, что центр тяжести находится посередине, то отсюда следует, что оба груза равны.

Если один из грузов вдвое больше другого, то центр тяжести находится ближе к большему грузу, действительно между грузами в отношении 1:2; обратно, если известно, что центр тяжести делит расстояние между грузами в отношении 1:2, то один из грузов (а именно тот, который ближе к центру тяжести) вдвое больше другого.

Поскольку центр тяжести стержня, масса которого сосредоточена в двух точках M и N , совпадает с центром тяжести системы двух материальных точек M и N (соединяющих их массах), то мы получим следующий результат:

Центр тяжести системы двух материальных точек лежит на прямой, соединяющей эти точки. Его расстояние от этих точек обратно пропорционально их массам (а значит, и их массам).

В частности, центр тяжести лежит на расстоянии между точками равном 1/3 от A и только тогда, когда обе точки имеют равные веса. Центр тяжести лежит на расстоянии между точками в отношении 1:2 тогда и только тогда, когда одна из точек вдвое тяжелее другой (при этом центр тяжести ближе к более тяжелой точке).

§ 7. ТЕОРЕМЫ О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПРЯМЫХ

Рассмотрим какую-либо систему материальных точек α являющуюся частью систем γ и δ . Обозначим через M и N материальные центры систем γ и δ . В силу утверждения III из § 6, система материальных точек M и N эквивалентна системе α . В силу того, материальный центр системы α совпадает с материальным центром системы, состоящей из точек M и N , и следовательно, лежит на прямой, соединяющей эти точки. Поскольку материальный центр системы расположен в ее центре тяжести, то мы получим следующую теорему:

Центр тяжести системы материальных точек, являющейся частью систем γ и δ , лежит на прямой, соединяющей центры тяжести систем γ и δ .

Мы дали сейчас три геометрических приложения этой теоремы.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке. Поместим в вершины треугольника равные точечные грузы, которые обозначим теми же буквами A , B , C , что и соответствующим вершинам (рис. 26). Подберем такую систему материальных точек равновесия на две части γ и δ так, чтобы A входила в γ , а B и C в δ . Центр тяжести системы γ конечно есть A , а центр тяжести системы δ в силу симметрии правильного треугольника лежит в середине BC стороны BC . Тогда по теореме, медианы систем γ и δ несут постоянного напарника, и что тяжесть O системы A , B , C лежит на медиане AE . Совершенно так же убеждаемся, что O лежит и на двух других медианах. Это бы, если бы три медианы непременно пересекались в одной точке.

Поскольку материальный центр M системы δ находится в точке E , то расстояние материального центра системы γ , совпадающего с материальной точкой A , до центра тяжести системы A , B , C делит отрезок EA в отношении 1:2, причем находится ближе к E . Но этот центр тяжести и есть центр тяжести системы A , B , C , т. е. общая точка пересечения всех медиан. Мы получили, следовательно, известную теорему о том,

что точка пересечения медиан относится к каждой медиане в три раза, считая от вершины, лежащей на этой медиане.

Пространственный четырехугольник. Пусть дан пространственный четырехугольник $ABCD$ (рис. 27). Покажем, что прямые EF и KL , соединяющие середины его противоположных сторон, пересекаются. Помимо в вершинах четырехугольника дадим группы точек, которые будем считать материальными точками.

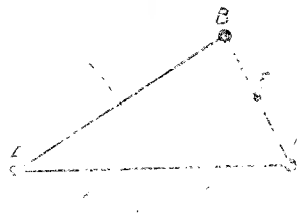


Рис. 26.

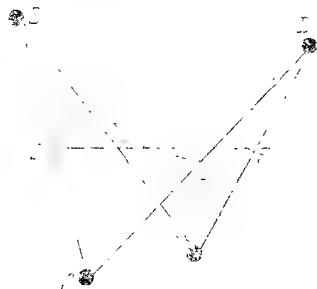


Рис. 27.

Как и для доказательства теоремы о медианах, достаточно рассмотреть, что центр тяжести четырехугольника лежит на каждой из прямых EF и KL . Покажем, например, что он лежит на EF (то, что он лежит на KL , обнаружится аналогично). Для этого рассмотрим систему материальных точек A, B, C, D на две части: в одну из них включим точки A и B , в другую — C и D . Центр тяжести первой части будет расположен в точке E , центр тяжести второй — в точке F . В силу теоремы о центре тяжести системы материальных точек центр тяжести всей системы (материальных точек A, B, C, D) должен лежать на прямой EF . Целесообразным является отметить, что отрезки EF и KL , пересекясь, делятся пополам.

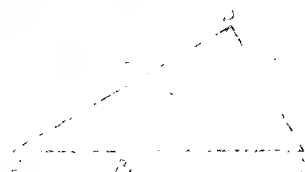


Рис. 28.

Теорема Чебы. Теорема о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, является частным случаем частного положения, известного под именем теоремы Чебы:

Пусть A_1, B_1, C_1 — три точки, лежащие соответственно на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC (рис. 29). Для того чтобы прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы имело место

$$\frac{AE_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1 \quad (1)$$

Рекомендуем читателю проверить, что соотношение (1) действительно имеет место в следующих случаях:

1. Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 суть биссектрисы треугольника. (Указание: использовать теорему о том, что биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.) Отсюда вытекает, что биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.

2. Прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 суть высоты треугольника. (Указание: использовать формулу, выражающую длину отрезков, на которые высота делит соответствующую сторону.) Отсюда вытекает, что высоты остроугольного треугольника пересекаются в одной точке.

Перейдем к доказательству теоремы Чевы.

Пусть соотношение (1) имеет место. Покажем, что прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке. Рассуждение proceeds так же, как и в предыдущих двух пунктах. Мы докажем, что при соответствующем образе сил (равных грузах, размещенных в вершинах, центр тяжести системы лежит на каждой из прямых AA_1 , BB_1 , CC_1). Пусть (в каком-то масштабе)

$$\begin{aligned} AB_1 &= c, & B_1C &= b, \\ CA_1 &= c, & A_1B &= a, \\ BC_1 &= e, & C_1A &= f, \end{aligned}$$

так что

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{f} = 1 \quad (2)$$

Положим в вершине A груз, равный bd , в вершине B — груз, равный ac , и в вершине C — груз, равный ad . Центр тяжести системы $\{A, C\}$ лежит в точке, расстояния которой от вершин A и C обратно пропорциональны грузам в этих вершинах; такой точкой является B_1 . Точно так же центр тяжести системы $\{B, C\}$ лежит в точке A_1 . Наконец, центр тяжести системы $\{A, B\}$ лежит в точке, расстояния которой x и y до вершин A и B обратно пропорциональны грузам bd и ac , т. е.

$$\frac{x}{y} = \frac{ac}{bd} \quad \text{или} \quad x + y = f + c.$$

Из (1) и соотношения (2) вытекает, что

$$\frac{xc}{fd} = \frac{f}{c}.$$

Поэтому $x=f$, $y=c$. Следовательно, центр тяжести системы $\{A, B\}$ попадет в точку C_1 . Остается заметить, что, в силу приведенной в начале параграфа теоремы, центр тяжести каждого из треугольников лежит на каждой из прямых AA_1 , BB_1 , CC_1 .

Обратно, пусть прямые AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке O ; покажем, что имеет место соотношение (1). Для этого представим себе данный треугольник в виде невесомой пластины; расположим его горизонтально, подвесим в точке O и поместим в вершинах грузы таким образом, чтобы треугольник оказался в равновесии (рис. 29).

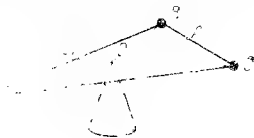


Рис. 29.

В силу утверждения 1 из § 5, точка O будет центром тяжести треугольника, рассматриваемого как указанный, грузами в вершинах и, следовательно, центром тяжести системы этих грузов. Поэтому точка O должна лежать на прямой, соединяющей A с центром тяжести системы $\{B, C\}$; следовательно, A_1 есть центр тяжести системы $\{B, C\}$. Точно так же B_1 и C_1 суть центры тяжести систем $\{C, A\}$ и $\{A, B\}$. Если вместо альтернативных точек A, B, C обозначить соответственно a, b, c , то, согласно приведенному параграфу,

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{c}{b}, \quad \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{a}{c}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{b}{a}.$$

Из этих трех пропорций получаем требуемое соотношение (1).

§ 8. ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ СТЕРЖНЯ С МНОГИМИ ГРУЗАМИ

Обобщим рассмотрение § 6.

Представим себе теперь стержень с грузами $P_1, P_2, \dots, P_n$, расположенными на нем в грузах $A_1, A_2, \dots, A_n$ и пусть эти грузы находятся на расстоянии $a_1, a_2, \dots, a_n$ от стержня. Как и в § 6, для решения задачи достаточно найти такую точку O на стержне, в которой находится центр тяжести этой точки, стержня и грузов. Равновесие системы X так и будет иметь место.

Вспомогательные рассуждения, которые мы сделали в предыдущем параграфе, остаются справедливыми и для стержня.

Пусть абсцисса груза P_1 равна a_1 , абсцисса груза P_2 равна a_2 и т. д., абсцисса груза P_n равна a_n . Предположим (рис. 26), что точка опоры O находится между грузами P_k и P_{k+1} (при этом не исключается случай, когда один из этих грузов помещен как раз в O). Тогда абсциссы $P_1, \dots, P_k$ будут равны соответственно $x - a_1, \dots, x - a_k$, а абсциссы $P_{k+1}, \dots, P_n$ будут равны соответственно $a_{k+1} - x, \dots, a_n - x$. Так как стержень находится в равновесии, то сумма моментов сил, закручивающих его против часовой стрелки, должна быть



Рис. 26.

равна сумме моментов сил закручивающих его по часовой стрелке, т. е.

$$P_1(x - a_1) + \dots + P_k(x - a_k) = P_{k+1}(a_{k+1} - x) + \dots + P_n(a_n - x).$$

Переносим члены, содержащие x , в левую часть, а остальные — в правую, и получим

$$(P_1 + \dots + P_k) - P_{k+1} - \dots - P_n)x = P_1 a_1 + \dots + P_k a_k - P_{k+1} a_{k+1} - \dots - P_n a_n.$$

Отсюда

$$x = \frac{P_1 a_1 + \dots + P_k a_k}{P_1 + \dots + P_k} - \frac{P_{k+1} a_{k+1} + \dots + P_n a_n}{P_{k+1} + \dots + P_n}.$$

Пример 1. Пусть $P_1 = 1, P_2 = 2, \dots, P_n = n, a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$. В таком случае по выводу из формулы

$$x = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n}.$$

Чтобы вычислить это отношение, выпишем равенство

$$\begin{aligned} 1^3 &= 1^2 + 0^2 + 1^2, \\ 2^3 &= (1^2 + 1^2) + 1^2 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1, \\ 3^3 &= (2^2 + 1^2) + 2^2 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\ &\dots \dots \dots \\ n^3 &= (n-1)^2 + 1^2 + n^2 + 3 \cdot n + 1. \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получаем

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = 1 + (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + \dots + n) =$$

или

$$(n-1)^2 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 3(1 + 2 + \dots + n)$$

или

$$3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = (n-1)(n^2 - 2n) + 3(1 + 2 + \dots + n)$$

Разделим обе части на $3(1 + 2 + \dots + n)$. Тогда получим

$$\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{(n-1)(n^2 - 2n)}{3(1 + 2 + \dots + n)} + 1.$$

В сумме $1 + 2 + \dots + n$ столько же единиц, сколько заштрихованных квадратиков на рис. 31. А число этих заштрихованных квадратиков равно числу незаштрихованных, т. е. половине числа всех квадратиков прямоугольника, т. е. $\frac{n(n+1)}{2}$. Поэтому

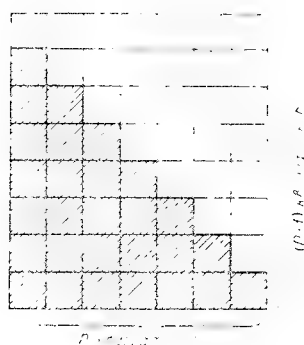


Рис. 31.

$$n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + \dots + n} = \frac{(n-1)(n^2 - 2n)}{3(1 + 2 + \dots + n)} + 1 = \frac{(n-1)(n^2 - 2n)}{3 \cdot \frac{n(n+1)}{2}} + 1 = \frac{2n-1}{3} + 1 = \frac{2n+1}{3}.$$

Итак, между прочим, получаем, что

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{2n+1}{3} \cdot 1 + 2 + \dots + n = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Пример 2. Пусть те же грузы, что и в примере 1, т. е. грузы с весами $1, 2, \dots, n$, расположены в точках с абсциссами $1, 2^2, \dots, n^2$. Докажите, что абсциссы центра тяжести есть

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

(Указание: воспользовавшись результатом примера 1, вычислите сумму кубов $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.)

Пример 3. Пусть в тех же точках, что и в примере 1, т. е. в точках с абсциссами $1, 2, \dots, n$, расположены грузы с весами $1^2, 2^2, \dots, n^2$. Докажите, что абсцисса центра тяжести есть

$$\frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

§ 9. ОДНА ЗАДАЧА ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ (ФОРМУЛИРОВКА)

Механические соображения помогают иногда решать не только геометрические, но и арифметические задачи. Один из очень любопытных примеров¹⁾ такого рода будет сейчас рассмотрен.

Возьмем строку из положительных чисел $P_1, P_2, \dots, P_n$ для того, чтобы сократить ее длину, мы вычтем из крайних членов P_1 и P_n число P , равное наименьшему из этих крайних членов, а взамен прибавим P к средним членам (если средняя членов — один, то оба числа P прибавляются к этому единственному среднему члену). При этом (если только $n > 2$) или два крайних числа обращаются в нуль, т. е. выпадают, или, следовательно, получившая строка будет уже строкой первоначальной. Так, например, если первоначальная строка имеет вид

$$1, 9, 8, 4,$$

то, вычтем строку

$$1, 0, 4, 1,$$

и тогда получившая строка имеет вид

$$0, 2, 4, 0,$$

а вычтем строку, состоящую из одного числа — единицы

$$1$$

и получим строку, состоящую из нулей. Таким образом строка $1, 9, 8, 4$ эквивалентна строке $0, 2, 4, 0$, а строка $0, 2, 4, 0$ эквивалентна строке $1, 0, 4, 1$, а строка $1, 0, 4, 1$ эквивалентна строке $6, 2, 6$. Заметим, что для строки, состоящей из одного члена, ее производная совпадает с ней самой.

Затем выберем какой-либо строкой α и поступим следующим образом. Найдем производную этой строки, обозначим ее β .

¹⁾ Этот пример любезно сообщен автору Петром Сергеевичем Шенюком.

чим ее α' . Далее найдем производную строку от строки α' . Эту новую строку обозначим α'' и назовем второй производной строки α . Производную от α'' назовем третьей производной от α и обозначим α''' и вообще производную от $(n-1)$ -й

производной назовем n -й производной и обозначим $\alpha^{(n)}$.

Поскольку длина каждой следующей производной на одну или две единицы меньше длины предыдущей, то, вычисляя последовательно производные для строки α , мы придем, наконец, к строке, длина которой равна 1 или 2; эту строку мы назовем последней производной или характеристической строкой α . Так, характеристикой строки 1, 9, 3, 4 будет строка 7, 10.

Заметим, что при переходе от строки к ее производной суммы всех членов строки не меняется. Поэтому сумма всех членов в характеристике равна сумме всех членов первоначальной строки; в случае, когда характеристика состоит из одного члена, его величина как раз и равна этой сумме. Что же касается случая характеристики длины два, то мы научимся вычислять величины ее членов (не вычисляя всех промежуточных производных) в следующем параграфе. А теперь поставим общий вопрос о том, когда характеристика строки состоит из одного, а когда из двух членов. Попробуем выяснить сперва, как обстоит дело, путем математического эксперимента. С этой целью вычислим характеристики нескольких строк типа 1, 2, 3, ..., n . Последовательные производные будем поднимать друг над другом и подчеркивать средние члены:

Пример 1.	α	1	<u>2</u>	3		
	α'		4	2		
Пример 2.	α	1	<u>2</u>	3	4	
	α'		3	4	3	
	α''			10		
Пример 3.	α	1	2	<u>3</u>	4	5
	α'		2	<u>5</u>	4	4
	α''			7	<u>6</u>	2
	α'''			5	10	

Пример 4.	α	1	2	3	4	5	6
	α'		2	4	5	5	5
	α''			4	9	5	3
	α'''			1	12	8	
	α''''				14	7	

Пример 5.	α	1	2	3	4	5	6	7
	α'		2	3	5	5	6	6
	α''			3	8	7	6	4
	α'''				8	13	6	1
	α''''				7	14	7	
	α'''''					28		

Пример 6.	α	1	2	3	4	5	6	7	8
	α'		2	3	5	6	6	7	7
	α''			3	5	10	6	7	5
	α'''				5	13	9	7	2
	α''''				3	13	13	7	
	α'''''					16	16	4	
	α''''''					12	24		

Пример 7.	α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	α'		2	3	4	7	6	7	8	8
	α''			3	4	9	8	7	8	6
	α'''				4	9	12	7	8	3
	α''''				1	9	17	10	8	
	α'''''					9	19	16	7	
	α''''''					2	26	17		
	α'''''''						30	15		

Приведенные примеры показывают, что характеристика строки, представляющей собой отрезок натурального ряда,

может состоять как из одного, так и из двух членов. Можно отметить следующую закономерность: характеристика состоит из одного члена, если $n = 3k - 1$, а в противном случае — из двух членов. При этом обнаруживается новая интересная особенность: если характеристика состоит из двух членов, то один из них вдвое больше другого. Таким образом выявляется следующая любопытная теорема:

Характеристика строки 1, 2, 3, ..., n состоит из одного члена при $n = 3k - 1$ и из двух при $n = 3k$ или $n = 3k - 2$; в последнем случае один из двух членов (первый при $n = 3k$ и второй при $n = 3k - 2$) вдвое больше другого.

Эта теорема и будет доказана в следующем параграфе; при этом не будет решен и более общий вопрос: для каких строк характеристика состоит из одного, а для каких — из двух членов (как определить это по числам $P_1, P_2, \dots, P_n$, то есть по всем провозным строкам)?

§ 10. ОДНА ЗАДАЧА ИЗ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ (РЕШЕНИЕ)

Дадим нашей задаче новое, механическое истолкование. Вместо строки чисел $P_1, P_2, \dots, P_n$ рассмотрим стержень рис. 32, а), нагруженный в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$ (таких

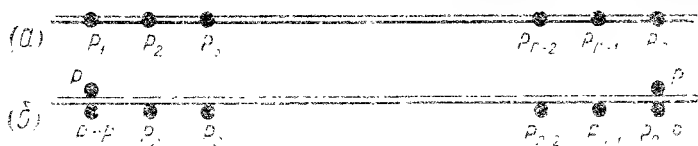


Рис. 32.

по 1, 2, ..., $A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$ грузов $P_1, P_2, \dots, P_n$. Тогда произвольная строка отвечает новой системе грузов.

Покажем, что материальный центр произвольной системы грузов совпадает с материальным центром первоначальной системы. Разделим мысленно каждый из крайних грузов P_1 и P_n на два точечных груза

$$P_1 = \bar{P} + (P_1 - \bar{P}), \quad P_n = \bar{P} + (P_n - \bar{P}),$$

где $\bar{P}$ — наименьший из грузов P_1 и P_n (так что то крайний груз или и грузов $P_1 = \bar{P}$ и $P_n = \bar{P}$ равен нулю). Тогда систему грузов α можно представить как объединение двух систем: системы α , состоящей из грузов $P_1 - \bar{P}, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n - \bar{P}$ изображена над стержнем на рис. 32, б), и

системы z , состоящей из двух грузов весом P каждый (см. рис. 32, б). При переходе к производной системе грузов все грузы системы z остаются на своих местах, а грузы системы z' сближаются, перемещаясь каждый на одинаковое расстояние (чтобы прибавиться к средним углам!). Другими словами, производная система z' является объединением двух систем z'_1 и z'_2 , из которых система z'_1 совпадает с системой z , а система z'_2 получается из системы z сближением обоих грузов последней на одинаковое расстояние. Поскольку, очевидно, z' и z эквивалентны, то в силу утверждения III из § 3 эквивалентны и системы z и z' . А материальные центры эквивалентных систем совпадают.

Итак, при переходе от системы грузов к ее производной материальный центр (а значит, и центр тяжести) системы не меняется. Следовательно, он не меняется и при переходе от производной системы к ее характеристике.

Таким образом, характеристика — это один или два груза, грузы, имеющие тот же центр тяжести, что и первоначальная система грузов. Заметим еще, что доминирующие точки грузов, составляющих характеристику, совпадают с положением центров грузов первоначальной системы, т. е. с элементами $A_1, \dots, A_n$. Если характеристика содержит два груза, то эти грузы расположены в отдельных точках, A_1 и A_{n+1} , центр тяжести характеристики — между ними. Поэтому характеристика только тогда может состоять из одного груза, когда ее центр тяжести совпадает с одним из элементов первоначальной системы, т. е. совпадает с одной из точек $A_1, \dots, A_n$.

Согласно § 8 центр тяжести первоначальной системы имеет абсциссу

$$\frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + \dots + P_n a_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n},$$

где $a_1, \dots, a_n$ — абсциссы точек $A_1, \dots, A_n$. Если принять, что $a_1 = 1, a_2 = 2, \dots, a_n = n$, то абсциссу центра тяжести выразит формула

$$\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}.$$

Чтобы центр тяжести совпал с одной из точек $A_1, \dots, A_n$ (необходимо и достаточное условие), необходимо, чтобы выражение целым числом. Отсюда вытекает эквивалентное утверждение: характеристика строка $P_1, P_2, \dots, P_n$ тогда и только тогда состоит из одного члена, когда число $\frac{P_1 + P_2 + \dots + P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}$ — целое.

В частности, если $P_1 = 1^2, P_2 = 2^2, \dots, P_n = n^2$, т. е. м. пример 3 из § 8, то $\frac{P_1 \cdot 1 + \dots + P_n \cdot n}{P_1 + \dots + P_n} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$. Это число не является целым (за исключением тривиального случая $n = 1$). Действительно, если бы это число было целым, то было бы целым и число $4 \cdot \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)}$. А тогда нечетное число $4n+2$ делилось бы на $2n+1$.

$$4 \cdot \frac{3n(n+1)}{2(2n+1)} = 4n+2 \Rightarrow \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

Число $\frac{n+1}{2n+1}$ является целым лишь в случае $n+1 = 0$. Но так как $n > 1$, характеристика строки $1, 4, 9, \dots, n^2$ всегда состоит из двух чисел.

Если $P_1 = 1, P_2 = 2, \dots, P_n = n$, то (см. пример 1 из § 8) значение выражения $\frac{P_1 \cdot 1 + \dots + P_n \cdot n}{P_1 + \dots + P_n}$ равно числу $\frac{2n+1}{3}$. Если $n = 3k+1$, то число $\frac{2n+1}{3} = 2k+1$ нечетно и характеристика состоит из одного члена. Если $n = 3k$, то $\frac{2n+1}{3} = 2k + \frac{1}{3}$; если $n = 3k+2$, то $\frac{2n+1}{3} = (2k+1) + \frac{2}{3}$; в обоих последних случаях $\frac{2n+1}{3}$ не есть целое число и характеристика состоит из двух членов. Этим доказана первая часть теоремы, сформулированной в конце предыдущего параграфа.

Если $n = 3k$, то центр тяжести системы грузов $1, 2, \dots, n$ имеет, как только что показано, абсциссу $2k + \frac{1}{3}$. Следовательно, расстояние между точками A_{2k} и $A_{2k+\frac{1}{3}}$ равно нулю. В этих точках находятся грузы, образующие характеристику первой системы грузов. Поэтому центр тяжести системы грузов $A_{2k}, A_{2k+\frac{1}{3}}, A_{2k+\frac{2}{3}}, A_{2k+\frac{1}{3}}$ совпадает с центром тяжести системы грузов $A_{2k}, A_{2k+\frac{1}{3}}, A_{2k+\frac{2}{3}}$, который расположен в $A_{2k+\frac{1}{3}}$. Мы знаем, что абсцисса $2k + \frac{1}{3}$ есть первый член характеристики двух систем второго. Если теперь $n = 3k+2$, то абсцисса центра тяжести равна $2k+1 + \frac{2}{3}$. Нетрудно видеть, что она совпадает с абсциссой точки $A_{2k+\frac{2}{3}}$ и $A_{2k+\frac{1}{3}}$, причем $A_{2k+\frac{2}{3}}$ является вторым членом характеристики второй системы грузов, а $A_{2k+\frac{1}{3}}$ — вторым членом характеристики первой системы грузов. Таким образом, абсциссы $2k+1 + \frac{2}{3}$ и $2k+1 + \frac{1}{3}$ являются членами характеристик обеих систем. Тем самым утверждение § 9' также доказано.

Сумма значений характеристик строк 1, 2, ..., n равна сумме элементов самой строки, т. е. $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (см. пример 1 из § 3). Зная, что формулы для вычисления характеристик строк можно вывести и сами эти формулы. Получаем для них следующие значения: $\frac{n(n+1)}{2}$ (маленький член) и $\frac{n(n+1)}{2}$ (большой член).

Обобщительно, для характеристики строки 1, 2, ..., n рассуждений вида

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} - 1, \frac{n(n+1)}{2} - 2, \dots, \frac{n(n+1)}{2} - n & \quad \text{если } n = 3k, \\ \frac{n(n+1)}{2} - 1 & \quad \text{если } n = 3k + 1, \\ \frac{n(n+1)}{2} - 1, \frac{n(n+1)}{2} - 2 & \quad \text{если } n = 3k + 2. \end{aligned}$$

1. Обобщим далее для вычисления характеристики строки $P_1, \dots, P_n$ подлинно следующий алгоритм. Прежде всего найдем x из

$$x = \frac{P_1 \cdot 1 + P_2 \cdot 2 + \dots + P_n \cdot n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n}.$$

Если характеры характеристик строки из одного члена, то найдем которое равно сумме $P_1 + P_2 + \dots + P_n$. Если x не целое, то n представим x в виде

$$x = y + z,$$

где $y = \text{целое}$ и $0 < z < 1$. Характеристика строки строится из y и z так: Q_1 и Q_2 таковы

$$Q_1 + Q_2 = P_1 + P_2 + \dots + P_n. \quad (1)$$

Так как Q_1 и Q_2 могут иметь значения $1, 2, \dots, n$, то очевидно, что z может быть и $z = 1$ и тогда алгоритм для $z = 1$ совпадает с алгоритмом для $z = 0$.

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} \cdot z \\ Q_2 &= \frac{1}{2} \cdot z \end{aligned} \quad (2)$$

Умножив (2) на y и сложив с (1) для Q_1 и Q_2

$$Q_1 = \frac{1}{2} \cdot z \cdot y + \frac{1}{2} \cdot Q_1 + \frac{1}{2} \cdot Q_2 + Q_1 = Q_1 + Q_2 = P_1 + P_2 + \dots + P_n, \quad (3)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} \cdot z \cdot y + \frac{1}{2} \cdot Q_1 + \frac{1}{2} \cdot Q_2 + Q_2 = P_1 + P_2 + \dots + P_n. \quad (4)$$

Выведем формулы для Q_1 и Q_2 из (3) и (4). Вычитая (3) из (4) получим $Q_2 - Q_1 = 0$, т. е. $Q_1 = Q_2$. Подставим $Q_1 = Q_2$ в (3) и получим $Q_1 = \frac{1}{2} \cdot z \cdot y + \frac{1}{2} \cdot Q_1 + \frac{1}{2} \cdot Q_1 + Q_1 = P_1 + P_2 + \dots + P_n$.

§ 11. НЕВОЗМОЖНОСТЬ ВЕЧНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Рассмотрим какой-нибудь выпуклый многоугольник и точку O внутри него. Опустим из точки O перпендикуляры на стороны многоугольника. Основания этих перпендикуляров могут лежать как на самих сторонах (как, например, перпендикуляр, опущенный на сторону AB на рис. 33), так и на продолжениях сторон (как перпендикуляры на стороны FA и EF на том же чертеже). Может, конечно, случиться, что основания всех перпендикуляров попадут на стороны (так будет, например, если O есть центр правильного многоугольника). Спрашивается: может ли случиться, что основания всех перпендикуляров попадут не на стороны, а на продолжения сторон? Оказывается, что так случиться не может, т. е. *основание хотя бы одного перпендикуляра лежит на соответствующей стороне (а не на ее продолжении).*

Для доказательства этого утверждения используем принцип,

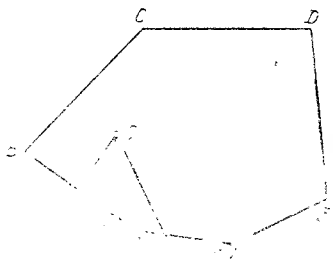


Рис. 33.

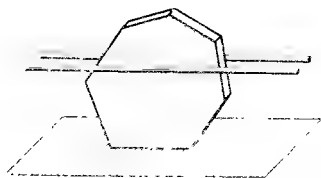


Рис. 34.

формулировкой в заглавии параграфа. Представим себе наш многоугольник в виде толстой пластинки с центром тяжести в точке O (можно, например, считать, что вся пластинка тяжелеем, а в точке O находится точечный груз). Поставим многоугольник ребром на горизонтальной плоскости. Если мы поставим его строго вертикально, то он не упадет: мы тогда только считаем, что он поддерживается в равновесии (см. рис. 34). Мы тогда ставим его так, чтобы его центр тяжести O был точно над краем, на котором он стоит. Если мы его наклоним, то в равновесии он не останется: в противном случае мы получили бы вечный двигатель. Но мы можем так его наклонить, что перпендикуляр из центра тяжести на ребро, по которому он стоит, будет лежать на ребре (в силу утверждения). Но в § 5. II мы установили, что для выпуклого многоугольника для любого основания перпендикуляра из точки O лежит на одной из сторон.

Аналогичная теорема справедлива и для многогранника. Именно, пусть дан выпуклый многогранник и точка O внутри него. Опустим из этой точки на плоскости всех граней многогранника перпендикуляры. Тогда *основание хотя бы одного из этих перпендикуляров лежит на самой грани (а не на ее продолжении)*.

Для доказательства представим себе многогранник в виде материального тела с центром тяжести в O . (Будем, например, считать весь многогранник невесомым, а в точку O поместим точечный груз.) Поставим теперь наш многогранник как-нибудь его гранью на горизонтальный пол. Многогранник либо останется стоять в равновесии, либо покатится; в последнем случае рано или поздно он опять-таки остановится в равновесии. Итак, у многогранника существует положение, в котором он неподвижно стоит на полу. Рассмотрим ту грань, которая является его площадью опоры. В силу утверждения II из § 5 перпендикуляр, опущенный из O на плоскость этой грани, проходит через самую эту грань. Мы нашли, таким образом, грань, удовлетворяющую сформулированным в теореме требованиям.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Все задачи, которые мы разбирали, можно было бы решить чисто математически. Однако не следует думать, что использование для решения математических задач механических соображений — просто игра ума. Подобные методы имеют и историческое, и практическое значение.

Еще Архимед применял законы равновесия к нахождению площадей криволинейных фигур: так, для вычисления площади параболического сегмента (т. е. фигуры, ограниченной дугой параболы и стягивающей эту дугу хордой) он подвешивал сегмент к концу рычага¹⁾. Во все времена механические и физические соображения оказывали и оказывают существенное влияние на получение математических результатов (если не в форме прямого доказательства, то в качестве наводящих рассуждений²⁾).

Применение в математике законов механики — частный случай общего приема, заключающегося в обратном использовании связи между явлениями природы и их математическим описанием. Описать математически какое-либо явление — означает найти формулы, позволяющие вычислять физические характеристики этого явления (скорости, температуры, расстояния и т. д.), или уравнения, решениями которых служат указанные характеристики. Прямое использование математического описания состоит в том, что мы можем узнать численные значения характеристик, не наблюдая самого явления, а продолжая вычисления по соответствующим формулам или решая соответствующие уравнения. Так поступать полезно особенно тогда, когда

¹⁾ См. книги В. Ф. Каутца, Архимед. М. — Л. Гостехиздат, 1949 и С. Я. Лурье, Архимед. М. — Л. изд. АН СССР, 1945.

²⁾ Добавление при корректуре. См. в этой связи главу IX (Физическая математика) вышеуказанной недавно в русском переводе книги Д. Нойа, Математика и правдоподобные рассуждения. М., ИИЛ, 1957.

само явление сложно, а его математическое описание просто. Можно, однако, поступить наоборот: вместо того, чтобы вычислять значения формул или решать уравнения, осуществить само явление опытным путем, измерить интересующие нас характеристики и тем самым экспериментально получить значения формул и решения уравнений. Такой путь не теснообразен тогда, когда мы имеем дело со сложными формулами или трудно решаемыми уравнениями, описывающими, однако, явления, которые сравнительно легко осуществить.

Этой традиции лежит в основе моделирования (т. е. исследования физических процессов на моделях), при котором осуществляется следующая схема: нужно изучить процесс A (моделируемый); он описывается формулами и уравнениями E ; одновременно E служит описанием для процесса A' (моделирующего, осуществимого в лабораторных условиях); осуществляют процесс A' , тем самым находят значения формул и решения уравнений E и, следовательно, устанавливают нужные свойства процесса A . О процессе A (а также о формулах и уравнениях E) говорит, что он *моделируется* процессом A' . Прибавим еще, что если два процесса описываются одними и теми же формулами или уравнениями, то в таком случае говорят об имеющей место между этими процессами *аналогии*.

Простейшим примером моделирования является изложение в § 4 решение задачи Штейнгауза. Моделируемое явление A — хождение детей в школу; интересующая нас характеристика — затрачиваемое время. Это время является значением некоторой формулы. Находится моделирующее явление A' (подвешивание грузов на пружах), для которого значением этой же формулы служит величина потенциальной энергии. Последнее явление осуществляется экспериментально.

Метод моделирования имеет большое практическое значение¹⁾ (в качестве моделирующих используются главным образом гидродинамические и электрические процессы). В частности, этот метод лежит в основе многих типов так называемых интегрирующих машин; с принципом действия простейшей из них — функционального интегратора — мы сейчас разберемся.

Пусть дана прямая r и кривая I , лежащая по одну сторону от этой прямой (рис. 35), причем каждый перпендикуляр к r пересекает I не более чем в одной точке. Возьмем два таких перпендикуляра AB и CD и будем искать площадь S криво-

¹⁾ См. статьи А. Н. Колмогорова, Моделирование Л. Н. Гукера и Махера. Моделирование математическое, в 28-м томе второго издания Большой Советской Энциклопедии.

линейной трапеции $ABDC$. С этой целью разобьем отрезок на мелкие части точками

$$X_1 = A, X_2, X_3, \dots, X_n, X_{n+1} = C$$

(на рис. 36 $n=6$). В каждом из отрезков $X_i X_{i+1}$ выберем точку T_i , из которой восставим перпендикуляр до пересечения

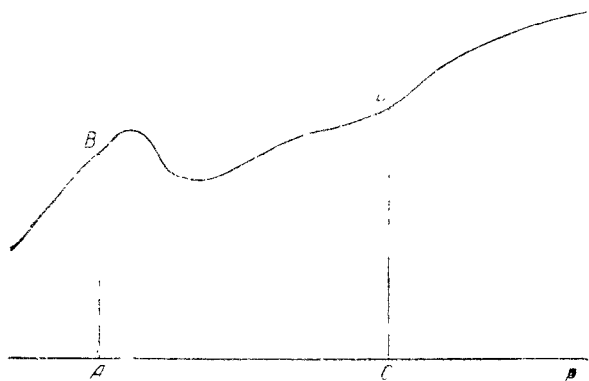


Рис. 35.

с кривой I в точке Y_i . Из каждой точки Y_i проведем прямые, параллельные p , до встречи с перпендикулярами, восставленными в точках X_i . Площадь S' ступенчатой фигуры, заключенной

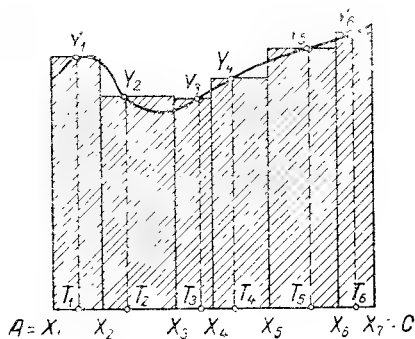


Рис. 36.

ванной на рис. 36, приблизительно равна площади S криволинейной трапеции, причем тем ближе к площади последней, чем мельче отрезки $X_i X_{i+1}$, на которые разбито основание AC .

Пусть длины отрезков $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ равны соответственно $x_1, \dots, x_n$, а длины отрезков $T_1 Y_1, \dots, T_n Y_n$ равны соответственно $y_1, \dots, y_n$. Тогда площадь S' равна

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n. \quad (1)$$

Рассмотрим теперь систему, состоящую из диска I и колеса II, прижатого своим ободом к диску I (рис. 37). Колесо II может перемещаться вдоль своей оси. Пусть в какой-то момент расстояние колеса II от центра O диска I равно y .

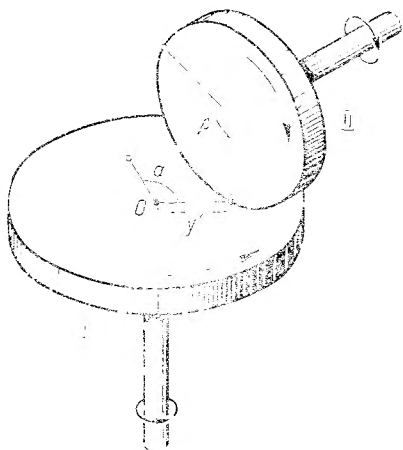


Рис. 37.

Повернем диск I на угол α (в радианной мере). Та, лежащая на диске I точка, которая до поворота диска соприкасалась с колесом II, пройдет при этом дугу, равную αy ; такое же расстояние пройдет и точка, лежащая на ободу колеса II. Колесо II повернется при этом на угол β . Поскольку при повороте колеса II на угол β точка его окружности проходит дугу βr , где r — радиус колеса II, то $\alpha y = \beta r$. Примем, что $r = 1$; тогда $\beta = \alpha y$. Если теперь установить колесо II на расстоянии y_1 от центра O и повернуть диск на угол x_1 , затем установить колесо II на расстояние y_2 от центра O и повернуть диск на угол x_2 и т. д., наконец, установить колесо II на расстоянии y_n от центра O и повернуть диск на угол x_n , то суммарный угол, на который в результате повернется колесо II, будет численно равен величине (1), т. е. площади S' ступенчатой фигуры, заштрихованной на рис. 36.

Нарисуем прямую p и кривую l на листе бумаги (рис. 38). Рассмотрим следующий механизм. Рейка укреплена на двух колесиках, одно из которых катится по прямой p (так что рейка постоянно перпендикулярна к этой прямой). На рейку насажен движок, способный перемещаться вдоль рейки. В центре движка укреплен штифт, конец которого касается бумаги. Представим себе, что рейка связана с диском I и колесом II следующим образом: поворот колесика рейки вызывает поворот диска I на тот же угол; расстояние колеса II от центра диска O равно в любой момент расстоянию центра движка от начала рейки. Радиус колесика рейки примем равным 1. Будем

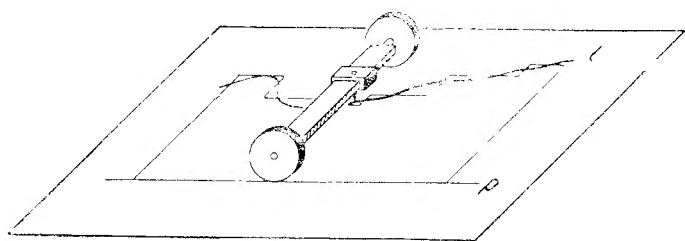


Рис. 38.

обводить штифтом контур ступенчатой фигуры, построенной на рис. 38; при этом рейка будет катиться вдоль прямой p , а движок перемещаться по рейке. Из сказанного в предыдущем абзаце вытекает, что в результате колесо II повернется на величину, равную площади S' . Чем мельче разбиение на части отрезка AC , тем ближе ломаная, составляющая контур ступенчатой фигуры, приближается к кривой l и тем ближе S' приближается к S . Если поэтому обводить штифтом не ломаную, а самую кривую l , то колесо II повернется на величину, равную S . Поворот колеса II может регистрироваться на специальной шкале.

Моделируемым процессом здесь является процесс измерения площади криволинейной трапеции при помощи вычисления площадей ступенчатых фигур. Этот процесс описывается формулой (1). Та же формула, как оказалось, описывает некоторый другой процесс, связанный с фрикционным механизмом, изображенным на рис. 37. Это дает нам возможность моделировать посредством указанного механизма формулу (1) и выражаемый ею процесс измерения площади.

Механические аналогии привели нас, таким образом, к прибору для вычисления площадей криволинейных фигур (правда фигур особого вида — криволинейных трапеций¹⁾).

Закачивая наше изложение, сделаем одно замечание принципиального характера. Все рассуждения, основанные на приведении механических соображений, могут показаться придирчивому читателю некорректными. Уже первый, самый простой пример, разобранный в § 1, способен вызвать возражения. Действительно, нить не есть прямая (она имеет определенную толщину, и, если на нее посмотреть в микроскоп, окажется довольно неправильной формы), так что фраза «нить идет по прямой» не имеет точного смысла. Далее, в строгом смысле нельзя говорить о конце нити как о точке (да и само утверждение, что груз прикреплен к нити в определенной точке, тоже не является безупречным). Наконец, всякая реальная нить растяжима, поэтому длина нити с грузом больше длины нити без груза.

Можно было бы привести много критических замечаний подобного рода, относящихся как к только что проведенному рассуждению, так и к аналогичным рассуждениям, которые лежат в основе всего изложения. Однако не следует думать, что все эти рассуждения тем самым лишаются познавательной ценности. Мы считаем их не менее убедительными, чем геометрические доказательства. Дело в том, что все наши утверждения о нитях, грузах и т. п. имеют лишь приближительный характер и выполняются тем точнее, чем более совершенными свойствами обладает взятый нами объект (нить, груз, и т. п.). В нашем случае некоторые утверждения (например, «нить идет по прямой») выполняются тем точнее, чем тоньше выбранная нить; в таком случае говорят, что эти утверждения выполняются для бесконечно тонкой нити. Другие утверждения (например, что длины нити с грузом и без груза равны) выполняются тем точнее, чем менее растяжима нить; в таком случае про эти утверждения говорят, что они выполняются для абсолютно нерастяжимой нити. Ясно, что бесконечно тонких и абсолютно нерастяжимых нитей в природе не бывает. Это такое же идеальное понятие, как, например, известное из школьного курса понятие точки приложения силы; выроды, сделанные для сил, приложенных в точках, выполняются реально тем точнее, чем меньше поверхность взаимодействия тел. Такой же идеализацией является и понятие материальной точки; факты, установленные для материальных точек, выполняются для реальных тел тем точнее, чем меньше их объемы.

Хочется подчеркнуть здесь, что все понятия и законы механики (как и вообще физики) связаны с идеализацией явлений природы: поэтому уже школьник, быть может, не отдавая себе в том отчета, сплошь и рядом сталкивается с подобными идеализациями. Возьмем,

¹⁾ Приборы, дающие площади криволинейной трапеции при обходе ее криволинейной стороны, называются интегральными (см. Б. Н. Делоне. Краткий курс математических машин, ч. 1, М. — Л., Гостехиздат, 1952). Приборы, дающие площадь произвольной фигуры при полном обходе ее контура, называются планиметрами. О планиметрах см. в упомянутой только что книге Б. Н. Делоне и в книге А. М. Лопатина. Вычисление площадей ориентированных фигур, составляющей 20-й выпуск настоящей серии.

например, одно из начальных понятий механики — понятие равномерного движения. Совершенно равномерных движений в природе не бывает (при тщательном измерении оказывается, что даже стрелки часов движутся неравномерно). Однако в целом ряде случаев неравномерность столь мала, что ею целесообразно пренебречь; так и возникает понятие равномерного движения. То же самое можно сказать о первом законе Ньютона: ведь тела, на которые не действуют другие тела, не бывает. Список подобных примеров можно было бы продолжать до бесконечности, они пронизывают всю физику.

Мы видим, таким образом, что механика оперирует, по существу, не с реальными, а с идеальными телами и процессами, такими, как «тело, на которое не действуют другие тела», «прямолинейное равномерное движение» и т. д. При этом мы обращаемся с этими идеальными объектами как с реальными, т. е. так, как если бы они существовали в действительности.

Отметим, наконец, что механические абстракции (такие, как материальная точка, невесомая бесконечно тонкая абсолютно нерастяжимая нить и др.) ничем не отличаются по своей природе от геометрических абстракций (таких, как точка, прямая, плоскость и т. д.); ведь точки, прямые и плоскости не существуют в природе в виде реальных объектов, и реальный смысл утверждений, которые о них делаются, состоит в том, что они выносятся тем точнее, чем больше взятые реальные объекты приближаются по своим свойствам к точкам, прямым, плоскостям и т. д.
